運動方程式の数値計算法

運動方程式は，物体の質量をm，物体に加わる力をF，物体の加速度をaとすると，

$$ma = F$$

となる。

ここで加速度aは位置xの時間による二階微分$\dfrac{d^2x}{dt^2}$なので，運動方程式は実際には二階微分方程式となる。また，力は一般に，位置x，速度v，時間tの関数なので$F(x,v,t)$と書くことにする。すると運動方程式は次のように書ける。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,v,t)$$

これを，速度vを用いて連立一階微分方程式に書き直すと，次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m} F(x, v, t) \end{cases}$$

これに微分方程式の数値計算でよく用いられる４次の Runge-Kutta 法を適用すると，ある時刻の位置と速度（i番目の位置x_iと速度v_i）から微少時間Δt後の位置と速度（$i+1$番目の位置x_{i+1}と速度v_{i+1}）は次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t \cdot v_i \\
l_1 &= \Delta t \cdot F(x_i, v_i, t_i)/m \\
k_2 &= \Delta t \cdot (v_i + l_1/2) \\
l_2 &= \Delta t \cdot F(x_i + k_1/2, v_i + l_1/2, t_i + \Delta t/2)/m \\
k_3 &= \Delta t \cdot (v_i + l_2/2) \\
l_3 &= \Delta t \cdot F(x_i + k_2/2, v_i + l_2/2, t_i + \Delta t/2)/m \\
k_4 &= \Delta t \cdot (v_i + l_3) \\
l_4 &= \Delta t \cdot F(x_i + k_3, v_i + l_3, t_i + \Delta t)/m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\
v_{i+1} &= v_i + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6
\end{aligned}$$

実際には，空間の次元数 m と物体の個数 n の積 mn だけの自由度について上式を連立させて解く。

（加藤徳善）